Teori Rotasi Quaternion dan Sudut Euler dalam Fenomena Gymbal Lock

Julius Arthur 13523030[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13523030@mahasiswa.itb.ac.id, juliusarthur2005@gmail.com

***Abstrak*- Rotasi menjadi fundamental bagi kehidupan manusia. Terdapat berbagai bidang, baik di komputasi dan kehidupan nyata yang bergantung pada rotasi. Dalam perhitungannya, ada beberapa metode yang populer digunakan, seperti sudut Euler dan quaternion. Dalam penerapannya, sudut Euler memiliki kekurangan, yaitu *gymbal lock*. Penulis akan membahas latar belakang terjadinya *gymbal lock* dan bagaimana quaternion mencegah terjadinya fenomena serupa.**

***Keywords*—sudut Euler, gymbal lock, quaternion.**

I. Pendahuluan

Salah satu aspek yang sangat diperlukan manusia adalah rotasi. Rotasi menjadi hal yang fundamental pada berbagai bidang seperti robotika, penerbangan, animasi grafika computer, hingga wahana luar angkasa. Terdapat berbagai cara untuk menghitung rotasi dan deretan rotasi pada suat objek. Efektivitas, memori, kecepatan, serta kontinuitas menjadi aspek yang perlu diperhatikan dalam menghitung rotasi objek.

Salah satu metode perhitungan rotasi yang sering digunakan adalah sudut Euler. Sudut Euler pada tiga dimensi menjelaskan rotasi menjadi 3 sudut pada suatu sistem koordinat yang tetap. Rotasi pada sudut Euler dapat dipecah menjadi deretan dari beberapa rotasi. Pada teori ini, rotasi pada ruang 3 dimensi didefinisikan sebagai rotasi pada 3 sumbu. Namun, penggunaan sudut Euler akan menemukan sebuah masalah, yaitu *gymbal lock.*

Quaternion merepresentasikan rotasi berbda dari sudut Euler. Pada makalah ini, penulis akan membahas alasan munculnya peristiwa *gymbal lock* dan bagaimana memecahkan masalah tersebut dengan aljabar quaternion.

II. Dasar Teori

1. Sudut Euler

Pada sudut Euler, sebuah rotasi dapat dicapai dengan deretan rotasi pada sumbu tetap. Sumbu tersebut dapat merupakan sumbu pada ruang yang tetap atau sumbu yang tetap pada objek.

Rotasi sebuah vektor A menjadi vektor D dapat dinyatakan sebagai perkalian dari tiga rotasi pada tiga sumbu.

$$R = Rot(x, \Phi) \times Rot(y, \psi) \times Rot(z, \theta)$$

R kemudian dapat dinyatakan sebagai matriks 3 × 3.

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

Persamaan diatas menyatakan rotasi R dicapai dengan melakukan rotasi terhadap sumbu z sebesar θ, lalu rotasi terhadap sumbu y sebesar ψ, lalu rotasi terhadap sumbu x sebesar Φ.

Terdapat 12 kombinasi unik dari 3 sumbu rotasi yang ada.

2. Quaternion

Quaternion merupakan sistem yang memperluas bilangan kompleks dan digunakan dalam mendefinisikan rotasi pada ruang 3 dimensi. Quaternion terdiri dari 2 bagian, yaitu bilangan nyata dan bilangan imajiner.

$$q = q_w + q_x i + q_y j + q_z k$$

Dengan

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$ij = k, jk = i, ki = kj,$$
$$ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

Konjugat komples dari quarternion:

$$q' = q_w - q_x i - q_y j - q_z k$$

Norma quaternion q:

$$|q| = \sqrt{q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$$

Quaternion unit didefinisikan sebagai:

$$|q_{unit}| = 1$$

Quaternion unit digunakan dalam menyatakan sumbu rotasi pada ruang dimensi 3.

Rotasi titik p terhadap sumbu u dapat dinyatakan sebagai:

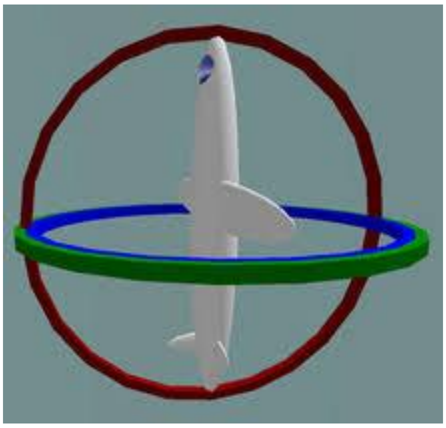
$$p' = qpq^{-1}$$

$$p' = \left(\cos\frac{\theta}{2} + u_{unit}\sin\frac{\theta}{2}\right) p \left(\cos\frac{\theta}{2} - u_{unit}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

dengan p dan u dalam quaternion.

III. GYMBAL LOCK

Gymbal lock adalah fenomena hilangnya derajat bebas sebuah poros akibat 2 poros yang berbeda dalam paralel.



Pada sudut Euler, rotasi A dicapai dengan melakukan deretan rotasi pada tiga sumbu tetap yang berbeda dan saling lepas satu sama lain. Rotasi dalam arah manapun dapat diraih dengan deretan rotasi ini. Namun, dapat muncul sebuah masalah yang sering dijumpai pada sudut Euler. *Gymbal lock* pada sudut Euler akan muncul saat dua sumbu rotasi pada sudut Euler saling paralel. Hal ini dapat terjadi jika objek diputar pada suatu sumbu cukup jauh hingga terjadi locking. Pada situasi ini, objek akan kehilangan satu sumbu rotasinya dan hanya dapat berputar pada 2 sumbu rotasi saja.

Contoh sederhananya terjadi saat objek diputar sejauh $\pi/2$ pada sumbu y. Rotasi R dinyatakan sebagai

$$R = R(x, \alpha) \times R(y, \beta) \times R(z, \gamma)$$

dengan

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika $\beta = \frac{\pi}{2}$,

$$R_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

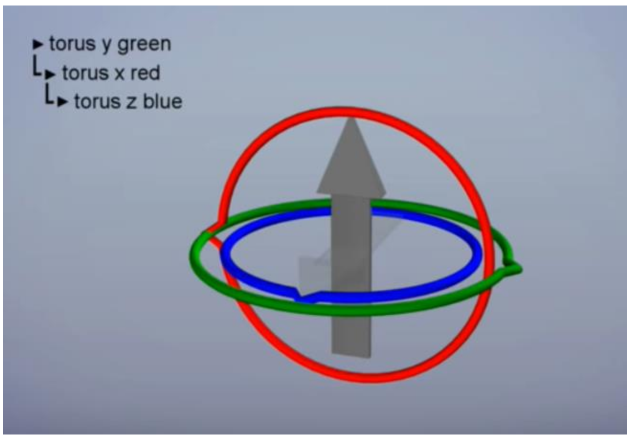
$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & -\sin\gamma\sin\alpha + \cos\alpha\cos\gamma & 0 \\ -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\sin\alpha & \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

Dan dengan identitas trigonometri, didapat R:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha + \gamma) & \cos(\alpha + \gamma) & 0 \\ -\cos(\alpha + \gamma) & \sin(\alpha + \gamma) & 0 \end{bmatrix}$$

Di sini, terdapat situasi yang menarik. Pada R, perhatikan bahwa mengubah nilai α sebesar a dengan mengubah γ sebesar a akan menghasilkan matriks yan sama! Jika diinterpretasikan dalam geometri, memutar objek pada sumbu x dan memutar objek pada sumbu z dengan sudut yang sama akan menghasilkan posisi objek yang sama. Objek telah mengalami fenomena *gymbal lock*. Situasi yang sama dapat terjadi dalam situasi yang lebih rumit, yang mengalami dua atau tiga rotasi sehingga menghasilkan *gymbal lock*.

Masalah ini sering dijumpai pada animasi 3 dimensi komputer. Dalam animasi, rotasi pada suatu sumbu menjadi bagian pentin untuk menghasilkan karya yang diinginkan. Namun, rotasi tersebut dapat menghasilkan dua sumbu rotasi dalam keadaan paralel.



Rotasi sebuah panah dengan menggunakan 3 sumbu rotasi yang memiliki hierarki. *(test links)*

Pada gambar diatas, terlihat dengan jelas hierarki dari sumbu rotasi. Terdapat sebuah solusi sederhana untuk mengatasi *gymbal lock*, yaitu dengan menempatkan sumbu yang paling jarang digunakan pada hierarkir paling rendah (sumbu berwarna biru). Diharapkan, kondisi paralel sangat jarang ditemukan. Namun, cara ini bukanlah sebuah solusi efektif terhadap *gymbal locking*. Fenomena ini dapat saja tetap terjadi, walaupun peluangnya sudah menjadi kecil.

Oleh karena itu, banyak sistem menggunakan sebuah metode untuk menghindari *gymbal loc*, quaternion. Pada quaternion, rotasi pada objek tidak mengandalkan 3 sumbu rotasi tetap. Pada rumus rotasi quaternion,

$$p' = \left(\cos\frac{\theta}{2} + u_{unit}\sin\frac{\theta}{2}\right) p \left(\cos\frac{\theta}{2} - u_{unit}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

rotasi hanya memerlukan satu sumbu, yaitu u, dengan u_{unit} sebagai quaternion satuan dari u. Bayangan titik p, p', dapat dihitung pada sudut apapun dan sumbu manapun. Dengan mengandalkan satu sumbu rotasi, fenomena *gymbal lock* dapat dihindari selama rotasi. Selain itu, tidak diperlukan deretan rotasi untuk mencapai nilai p', seperti pada metode sudut Euler.

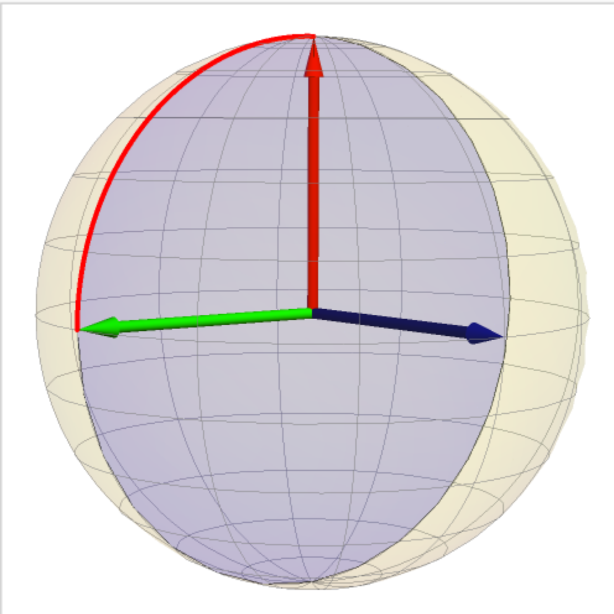
Dengan nilai rotasi yang sama pada percobaan sudut Euler,

$$p' = \left(\cos\frac{90}{2} + (\mathrm{j})\sin\frac{90}{2}\right) p \left(\cos\frac{90}{2} - (\mathrm{j})\sin\frac{90}{2}\right)$$

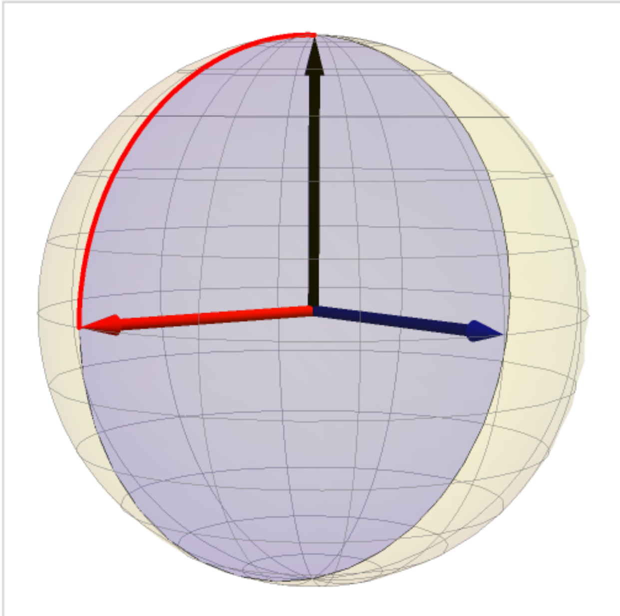
$$p' = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}j\right)(0i + 0j + 1k)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}j\right)$$

$$p' = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}j\right)(0i + 0j + 1k)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}j\right)$$

$$p' = 1i + 0j + 0k$$



Kondisi awal, panah berwarna merah mewakili vektor p (0,0,1) dan diputar pada sumbu y (panah berwarna biru) sejauh 90 derajat. (*wolfram)*



Hasil rotasi, vektor p tepat berhimpit dengan sumbu x. (*wolfram)*

Rotasi lain dapat selanjutnya diterapkan tanpa masalah.

Selain *gymbal lock*, quaternion juga memiliki beberapa keuntungan. Rotasi dengan quaternion dapat mendefinisikan sebuah rotasi dalam satu persamaan tanpa adanya beberapa deretan rotasi. Hal ini juga berdampak pada kemulusan rotasi. Pada animasi, rotasi dengan sudut Euler akan menghasilkan gerakan yang tidak tampak natural. Hal ini terjadi karena adanya deretan rotasi pada sumbu yang berbeda untuk mencapai sebuah rotasi. Sedangkan pada quaternion, rotasi dapat dilakukan dengan satu sumbu, sehingga gerakan yang dihasilkan pada animasi menjadi satu gerakan kontinu (interpolasi SLERP).

Selain itu, dalam dunia komputasi, quaternion juga dapat menghemat memori dan memiliki kecepatan yang lebih tinggi. Dalam memori, quaternion hanya membutuhkan 4 memori, sedangkan metode sudut Euler membutuhkan 9 memori. Dalam jumlah operasi komputasi, quaternion juga memerlukan lebih sedikit operasi dibandingkan sudut Euler.

Namun, rotasi dengan quaternion juga mendatangkan masalah baru, khususnya pada rotasi di dunia nyata. Pada robot tangan, sumbu rotasi yang dapat digunakan sangatlah terbatas. Sedangkan, rotasi dengan quaternion membutuhkan sebuah sumbu u yang dapat diletakkan secara bebas di ruang 3 dimensi. Oleh karena itu, robot tangan tidak dapat menerapkan quaternion dalam melakukan rotasi.

Selain itu, quaternion juga membutuhkan pemahaman yang lebih mendalam daripada sudut Euler.

IV. KESIMPULAN

Quaternion terbukti dapat mencegah terjadinya *gymbal lock*. Dengan menggunakan satu sumbu rotasi saja, rotasi dapat dilakukan secara langsung tanpa ada deretan rotasi. Oleh karena itu, quaternion dapat menghasilkan gerakan rotasi yang lebih mulus dan efisien. Namun, ini menjadi masalah pada dunia nyata, seperti pada robot tangan. Maka, pemilihan metode rotasi penting untuk bisa melakukan rotasi, didasarkan oleh keberadaan sumbu rotasi baik pada dunia nyata atau grafik visual.

Terdapat berbagai penerapan quaternion dalam dunia nyata, seperti pada dunia penerbangan. Pemahaman lebih lanjut terkait quaternion dibutuhkan untuk dapat menerapkan quaternion pada benda terbang tidak berawak.

REFERENCES

[1] Gregory G. Slabaugh, *Computing Euler angles from a rotation matrix*

[2] James Diebel, *Representing Attitude: Euler Angles, Unit Quaternions, and Rotation, 2006, pp 6 – 9.*

[3] NASA, Euler Angles, Quaternions, and Transformation Matrices. 1977.

[4] https://rotations.berkeley.edu/the-euler-angle-parameterization/

[5] Eberly, D., Rotation Representations and performance issues

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 31 Desember 2024

Julius Arthur 13523030